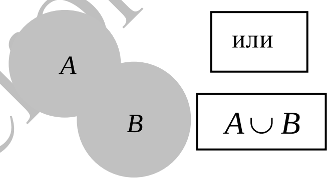
Тема 1. Множества. Числовые множества N, Z, Q, R

1. *Множества. Операции над множествами.*
2. *Множество натуральных чисел N.*
3. *Множество целых чисел Z. Делимость целых чисел. Признаки делимости.*
4. *Рациональные числа и действия над ними.*
5. *Множество R. Представление действительных чисел в виде десятичных дробей.*

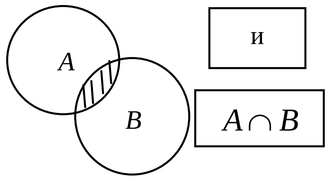
1. Множества, операции над множествами

Определение 1: Под <u>множеством</u> понимается совокупность некоторых объектов (элементов) множества, обладающих общим для них свойством. Обозначаются множества прописными латинскими буквами, элементы – строчными.

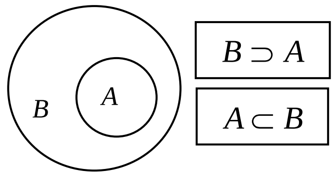
Определение 2: <u>Объединением множеств</u> *A* и *B* называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств *A* или *B*.



Определение 3: <u>Пересечением множеств</u> *A* и *B* называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых принадлежит как множеству *A*, так и множеству *B*.



Определение 4: Если любой элемент множества *A* принадлежит также множеству *B*, то множество *A* называется <u>подмножеством</u> множества *B*.



Определение 5: Множество, не содержащее ни одного элемента называется <u>пустым</u> и обозначается *Ø*.

Определение 6: Два множества *A* и *B* называются равными, если каждый элемент множества *A* является в то же время элементом множества *B* и наоборот. Обозначается *A=B*.

2. Множество натуральных чисел N

Определение 7: Числа употребляемые при счете предметов называются <u>натуральными</u>.

Определение 8: Все натуральные числа, расположенные в порядке возрастания образуют <u>натуральный ряд</u> и обозначаются *N*.

$N+\{0\}=N_0$

<u>Запись натуральных чисел</u>

Определение 9: Систематической записью натурального числа а, называется представление данного числа в виде

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_1 \cdot 10 + a_0, \quad a_n \neq 0, \quad a_i (i = \overline{0,n}) = \{0,1,...,9\}$$
$$a = \overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0}$$

Пример 1:
$\overline{ab} = a \cdot 10 + b$

Пример 2:
$3762 = 3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2$

Множество натуральных чисел замкнуто относительно двух операций: сложения и умножения.

Основные законы сложения и умножения натуральных чисел

1. Переместительный (коммутативный) закон сложения *a+b=b+a*
2. Переместительный (коммутативный) закон умножения *ab=ba*
3. Сочетательный закон сложения (ассоциативный) *(a+b)+c=a+(b+c)*
4. Сочетательный закон умножения (ассоциативный) *(ab)c=a(bc)*
5. Распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения *(a+b)c=ac+bc*

3. Множество целых чисел Z. Делимость целых чисел. Признаки делимости

Определение 10: Натуральные числа, им противоположные и {0} называются целыми числами

$$\boxed{Z=N+(-N)+\{0\}}$$

Все законы сложения и умножения натуральных чисел справедливы для целых чисел.

Делимость целых чисел

Целое число *a* делится на целое число *b* (нацело), если существует такое $c \in Z$, что *a=bc,* при этом *a* – делимое, *b* – делитель, *c* – частное. $a \vdots b \Leftrightarrow if \exists c : a = b \cdot c$

Свойства делимости целых чисел

1. Делимость рефлексивна $a \vdots a$
2. Отношение делимости транзитивно $if a \vdots b$ и $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$
3. $if a \vdots b \Rightarrow -a \vdots b; -a \vdots (-b); a \vdots (-b)$
4. $if a \vdots c$ и $b \vdots c \Rightarrow (a+b) \vdots c$
5. $if a \vdots c$ и $b \vdots c \Rightarrow (a-b) \vdots c$
6. $if a \vdots c$ и b не делится нацело на $c \Rightarrow (a \pm b)$ не делится нацело на c
7. $if a \vdots c, b \in Z \Rightarrow ab \vdots c$
8. Любое целое число всегда делится нацело на 1 и равно этому числу.
9. $0 \vdots b = 0, b \neq 0$

Признаки делимости.

1. На 2 делятся все четные числа.

2. На 3 и 9 делятся числа, у которых сумма цифр делится нацело на 3 и на 9. (*Пример: Число 1377 делится на 3 и на 9, так как сумма цифр 1+3+7+7=18 делится нацело на 3 и на 9).*
3. На 4 делятся те и только те числа, у которых число, записанное последними двумя цифрами делится нацело на 4. (*Пример: Число 23864 делится на 4, так как число 64 делится на 4).*
4. На 8 делятся только те числа, у которых число, записанное последними тремя цифрами делится нацело на 8. (*Пример: Число 23864 делится на 8, так как число 864 делится на 8).*
5. На 5 делятся те и только те числа, которые заканчиваются цифрой 0 или 5.
6. На 10 делятся только те числа, которые заканчиваются цифрой 0.

Деление с остатком

Разделить целое число *a* на $b \in Z, b \neq 0$ с остатком, значит найти такие 2 целых числа *q* и *r*, что *a=bq+r*, $r \geq 0, r < |b|$.

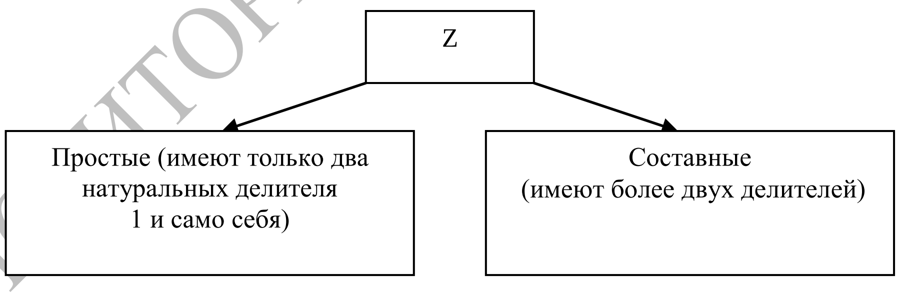
Определение 11: Целое число *d* называется наибольшим общим делителем целых чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, если *d* – общий делитель этих чисел, *d* делится на любой общий делитель чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Пример:
Найти НОД(-135; 180).
Ответ: НОД=45.

НОК(a1,a2,…,an) или [a1,a2,…,an]

Определение 10: Целое число *m* называется общим кратным чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$ (целых) не равных нулю, если *m* делится на каждое из этих чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Определение 11: Целое число *m* называется наименьшим общим кратным (НОК) целых чисел $a_1,a_2,\ldots,a_n$, если *m* является общим кратным этих чисел, и любое общее кратное этих чисел делится нацело на *m*.



Число 1 не является ни простым, ни составным числом.

Алгоритм нахождения НОД (алгоритм Евклида): последний не равный нулю остаток является НОД данных чисел.

Пример:
Найти НОД(7560;825)
Ответ: НОД=15.

Целые числа $a_1,a_2,\ldots,a_n$ называются взаимно простыми, если их НОД=1.

$$НОК(a,b)=\frac{ab}{НОД(a,b)}$$

Основная теорема арифметики: всякое число n кроме 1, может быть единственными способом представлено в виде произведения простых чисел (если не учитывать порядок расположения множителей).

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, где p_i – простые числа, $\alpha_i\in N$.

Замечание: разложение любого числа n на простые множители называется канонической записью числа n.

Правило нахождения НОД:

1. Разложить число на простые множители.
2. Составить произведение из всех простых множителей с наименьшим показателем степени.
3. Найти произведение.

Пример:
НОД(196;988)
Ответ: НОД=4.

Правило нахождения НОК:

1. Разложить число на простые множители.
2. Составить произведение из всех простых множителей одного числа и недостающих другого.
3. Найти это произведение.

4. *Рациональные числа и действия над ними*

Определение 12: Под множеством рациональных чисел (*Q*) понимают множество обыкновенных несократимых дробей вида $\frac{a}{b}$, где $a\in Z, b\in N$.

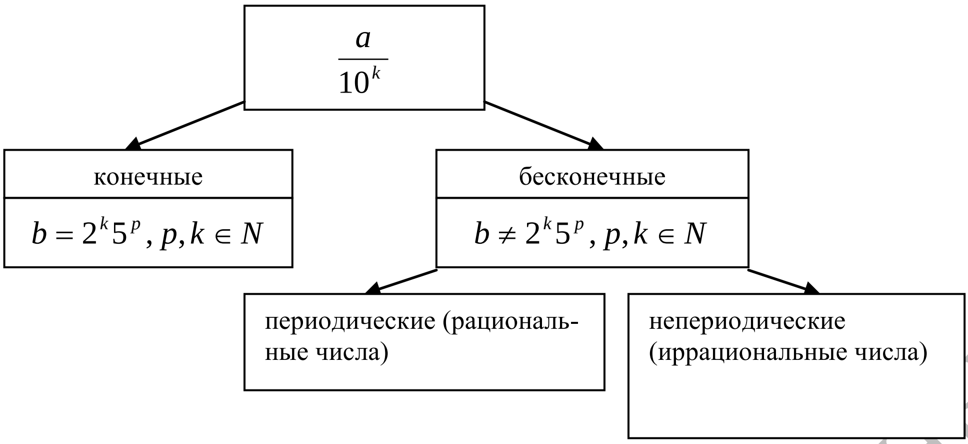
Множество *Q* замкнуто относительно всех четырех арифметических операций.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то дробь не изменится:

$$\frac{an}{bn}=\frac{a}{b}$$

Обыкновенная дробь вида $\frac{a}{10^k}$ *называется десятичной.*

Теорема 1. *Несократимую дробь можно обратить в конечную десятичную дробь тогда и только тогда, когда в разложении ее знаменателя на простые множители содержатся только цифры 2 и 5 или их степени или знаменатель равен 1.*



Определение 13: Десятичная дробь называется <u>бесконечной периодической</u>, если у нее цифра или группа цифр после запятой последовательно повторяются.

Примеры:
1,0(77); 1,0(27).

Теорема 2*. Любая бесконечная периодическая дробь является представлением некоторого рационального числа и наоборот.*

<u>Правило представления бесконечной периодической дроби в обыкновенную</u>: из числа, стоящего до второго периода вычесть число, стоящее до первого периода и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и 0 столько раз, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример:
2,10(7)

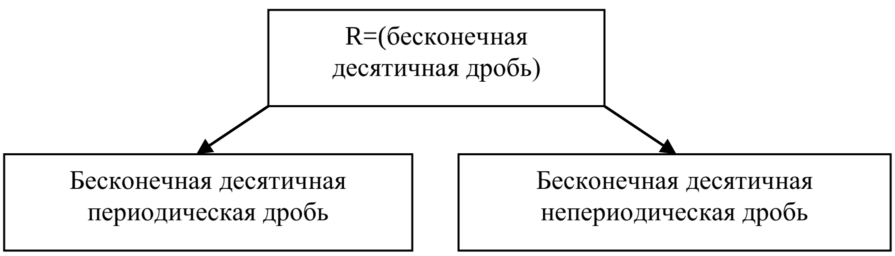
Ответ: $2\frac{97}{900}$.

5. *Множество R. Представление действительных чисел в виде десятичных дробей*

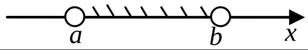
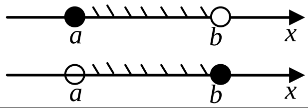
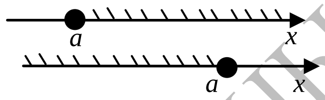
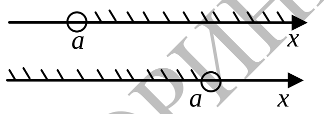
Определение 14: <u>Иррациональным</u> числом называется число, которое нельзя представить в виде обыкновенной несократимой дроби вида $\frac{a}{b}$, *где* $a \in Z, b \in N$.

R=Q+иррациональные числа.

Теорема 3. *Любое иррациональное число представимо в виде бесконечной непериодической десятичной дроби и наоборот.*



Числовые промежутки

Множество R, заданное неравенством	Числовые промежутки и их виды	Изображение на координатной прямой
$a < x < b$	(a; b) – интервал	
$a \le x < b$ $a < x \le b$	$[a;b)$ $(a;b]$ – полуинтервал	
$x \ge a$ $x \le a$	[a; +∞) (-∞; a] -луч	
$x > a$ $x < a$	(a; +∞) (-∞; a) -открытый луч	

Определение 15: Координатной прямой называется горизонтальная прямая с выбранным направлением, началом отсчета 0 и масштабом (единичным отрезком).

Координатная прямая является геометрической моделью множества *R*.

Вопросы для самоконтроля:

1.Натуральные числа.
2.Простые и составные числа.
3. Делитель, кратное.
4.Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, связь между ними.
5.Признаки делимости на 2, 3, 4,5,8,9,10.
6.Целые числа, действия над ними.
7.Противоположные числа.
7.Рациональные числа и арифметические действия над ними.
8.Действительные числа. Представление их в виде десятичных дробей.
9.Взаимнообратные числа.
10.Изображение чисел на числовой прямой.

Ассистент Старовойтова Н.А.